PART4 座標空間における図形

要点① 2点間の距離，分点の座標

座標空間の2点 A(a_1, a_2, a_3)，B(b_1, b_2, b_3) について，2点 A，B の間の距離は

AB＝

である。また，線分 AB を $m:n$ に内分する点を P，$m:n$ に外分する点を Q とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$ ＿＿＿＿＿，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=$ ＿＿＿＿＿

である。よって，次のことが成り立つ。

2点間の距離，内分点・外分点の座標

2点 A(a_1, a_2, a_3)，B(b_1, b_2, b_3) について

A，B 間の距離は　$\mathrm{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

$m:n$ に内分する点の座標は　$\left(\dfrac{na_1+mb_1}{m+n},\ \dfrac{na_2+mb_2}{m+n},\ \dfrac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$

$m:n$ に外分する点の座標は　$\left(\dfrac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \dfrac{-na_2+mb_2}{m-n},\ \dfrac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$

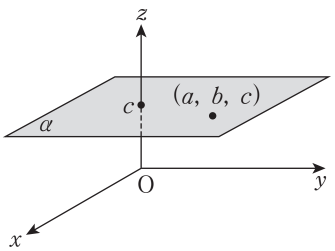
要点② 座標平面に平行な平面の方程式

点 $(0, 0, c)$ を通り，xy 平面に平行な平面 α 上の点の z 座標は常に c であり，x 座標，y 座標によらない。

逆に，z 座標が c である点は，平面 α 上にある。

この平面 α の方程式を　　　と表す。

一般に，次のことがいえる。



座標平面に平行な平面の方程式

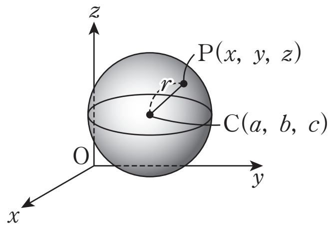
点 (a, b, c) を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は　$x=a$

点 (a, b, c) を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は　$y=b$

点 (a, b, c) を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は　$z=c$

要点 ③ 球面の方程式

空間において，定点Cからの距離が一定の値 r である点Pの集合を，中心がC，半径が r の「　　　」，または単に「　」という。



中心Cの座標を $(a,\ b,\ c)$，球面上の点Pの座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\mathrm{CP}=r \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{CP}^2=r^2$$

より

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

が成り立つ。これを「　　　　　　　」という。

球面の方程式

中心が点 $(a,\ b,\ c)$，半径が r の球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

特に，中心が原点，半径が r の球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

例　中心が点 $(3,\ -2,\ 1)$，半径が4の球面の方程式は

$$(x-\quad)^2+\{y-\qquad\}^2+(z-\quad)^2=\quad^2$$

すなわち　$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=16$

4 (1) 2点 A(1, 2, 3), B(-1, 3, 2) について，次のものを求めよ。

(i) 線分 AB を 2：3 に内分する点の座標

(ii) 線分 AB を 2：3 に外分する点の座標

(2) 点 (2, -3, -1) を通り，次の平面に平行な平面の方程式をそれぞれ求めよ。

(i) xy 平面　　(ii) yz 平面　　(iii) zx 平面

(3) 2点 A(3, 1, 0), B(1, 3, -4) を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

Point Pickup

2点間の距離，分点の座標

2点 A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3) について

A，B 間の距離は　$\mathrm{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

$m:n$ に内分する点の座標は　$\left(\dfrac{na_1+mb_1}{m+n},\ \dfrac{na_2+mb_2}{m+n},\ \dfrac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$

$m:n$ に外分する点の座標は　$\left(\dfrac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \dfrac{-na_2+mb_2}{m-n},\ \dfrac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$

座標平面に平行な平面の方程式

点 (a, b, c) を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は　$x=a$

点 (a, b, c) を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は　$y=b$

点 (a, b, c) を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は　$z=c$

球面の方程式

中心が点 (a, b, c)，半径が r の球面の方程式は　$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

特に，中心が原点，半径が r の球面の方程式は　$x^2+y^2+z^2=r^2$

第 6 講　PART4 確認問題

2 点 A(1, −3, 2), B(4, 3, −1) について，次の点の座標を求めよ。

1　線分 AB を 2：1 に内分する点

(ア , イ , ウ)

2　線分 AB を 2：1 に外分する点

(エ , オ , カキ)

点 (−2, 1, 3) を通り，次の平面に平行な平面の方程式をそれぞれ選べ。

3　xy 平面に平行な平面

ク

①　$x=-2$　②　$y=1$　③　$z=3$
④　$x=2$　⑤　$y=-1$　⑥　$z=-3$

4　yz 平面に平行な平面

ケ

①　$x=-2$　②　$y=1$　③　$z=3$
④　$x=2$　⑤　$y=-1$　⑥　$z=-3$

5 zx 平面に平行な平面

[コ]

① $x=-2$　② $y=1$　③ $z=3$
④ $x=2$　⑤ $y=-1$　⑥ $z=-3$

次の問いに答えよ。

6 2点 A(8, 3, 2), B(2, 1, −4) を直径の両端とする球面の方程式は

$$(x-\boxed{サ})^2+(y-\boxed{シ})^2+(z+\boxed{ス})^2=\boxed{セソ}$$

である。

PART4 座標空間における図形

4 (1) 2点 A(1, 2, 3), B(−1, 3, 2) について，次のものを求めよ。

(i) 線分 AB を 2：3 に内分する点の座標

(ii) 線分 AB を 2：3 に外分する点の座標

(2) 点 (2, −3, −1) を通り，次の平面に平行な平面の方程式をそれぞれ求めよ。

(i) xy 平面　　(ii) yz 平面　　(iii) zx 平面

(3) 2点 A(3, 1, 0), B(1, 3, −4) を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

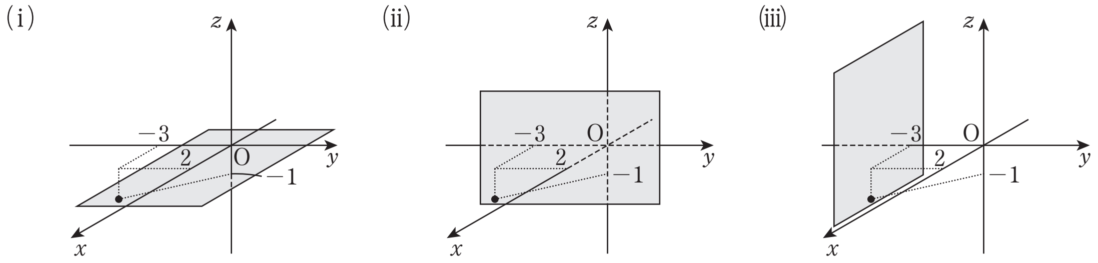
[解答]

(1) (i) $\left(\dfrac{3\times1+2\times(-1)}{2+3},\ \dfrac{3\times2+2\times3}{2+3},\ \dfrac{3\times3+2\times2}{2+3}\right)$ より $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{12}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

(ii) $\left(\dfrac{3\times1+(-2)\times(-1)}{-2+3},\ \dfrac{3\times2+(-2)\times3}{-2+3},\ \dfrac{3\times3+(-2)\times2}{-2+3}\right)$ より (5, 0, 5)

(2) (i) $z=-1$　　(ii) $x=2$　　(iii) $y=-3$

（参考図）



(3) 求める球面の中心を C とすると，直径 AB の中点であるから

$$\mathrm{C}\left(\frac{3+1}{2},\ \frac{1+3}{2},\ \frac{0-4}{2}\right)\quad すなわち\quad \mathrm{C}(2,\ 2,\ -2)$$

球面の半径 r は

$$r=\mathrm{CA}=\sqrt{(3-2)^2+(1-2)^2+\{0-(-2)\}^2}=\sqrt{6}$$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-2)^2+(y-2)^2+\{z-(-2)\}^2=(\sqrt{6})^2$$

すなわち　$(x-2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=6$

第6講 PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：1，ウ：0

[解説]

線分ABを2：1に内分する点の座標は

$$\left(\frac{1\times1+2\times4}{2+1},\ \frac{1\times(-3)+2\times3}{2+1},\ \frac{1\times2+2\times(-1)}{2+1}\right)$$ [A]

より

(3，1，0)

[A] 2点 $A(a_1, a_2, a_3)$，$B(b_1, b_2, b_3)$ について，線分ABを $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n}, \frac{na_2+mb_2}{m+n}, \frac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$$

2

[正解] エ：7，オ：9，カキ：−4

[解説]

線分ABを2：1に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-1\times1+2\times4}{2-1},\ \frac{-1\times(-3)+2\times3}{2-1},\ \frac{-1\times2+2\times(-1)}{2-1}\right)$$ [B]

より

(7，9，−4)

[B] 2点 $A(a_1, a_2, a_3)$，$B(b_1, b_2, b_3)$ について，線分ABを $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-na_1+mb_1}{m-n}, \frac{-na_2+mb_2}{m-n}, \frac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$$

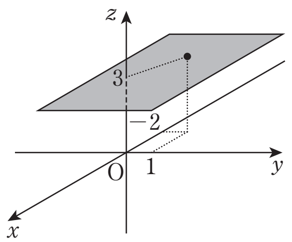
3

[正解] ク：③

[解説]

点 $(-2, 1, 3)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は

$z=3$ [C]



[C] 点 (a, b, c) を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は

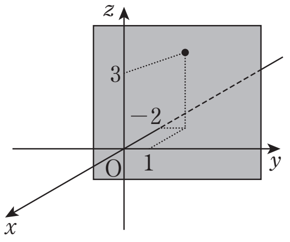
$z=c$

4 [正解] ケ：①

[解説]

点 $(-2,\ 1,\ 3)$ を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は

$$x=-2$$ [D]



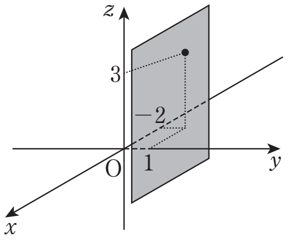
[D]　点 $(a,\ b,\ c)$ を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は
$x=a$

5 [正解] コ：②

[解説]

点 $(-2,\ 1,\ 3)$ を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は

$$y=1$$ [E]



[E]　点 $(a,\ b,\ c)$ を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は
$y=b$

6 **[正解]** サ：5，シ：2，ス：1，セソ：19

[解説]

求める球面の中心をCとすると，Cは直径ABの中点であるから A(8，3，2)，B(2，1，−4) より

$$C\left(\frac{8+2}{2},\ \frac{3+1}{2},\ \frac{2-4}{2}\right)$$

すなわち

$$C(5,\ 2,\ -1)$$

球面の半径 r は

$$r=CA$$
$$=\sqrt{(8-5)^2+(3-2)^2+\{2-(-1)\}^2}$$
$$=\sqrt{19}$$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-5)^2+(y-2)^2+\{z-(-1)\}^2=(\sqrt{19})^2$$ [F]

すなわち

$$\boldsymbol{(x-5)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=19}$$

[F]　球面の方程式
中心が点 $(a,\ b,\ c)$，半径が r の球面の方程式は
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$